كلية تربية بنها	**ثالثة رياضيات تعليم أساسي**	**الفصل الأول2013/2014**
قسم الرياضيات	**تطبيقات رياضية(٣)0314M**	**الزمن ساعتان**
	نموذج الأسئلة والأجابة	**السبت:٢٠١٣/١٢/٢٨**

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يلى(الدرجة الكلية للمادة ١٢٠ درجة موزعة بالتساوى):-

١- أ- أذكر بدون برهان نظرية جاوس للأنتشار ثم استخدم النظرية لايجاد التكامل السطحي $\oiint \underline{F}.\underline{ds}$ حيث $\underline{F} = x(z\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}\ )$ والسطح s هو السطح العلوي لنصف كرة أعلى المستوى xy حيث

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$$

ب-أحسب التكامل السطحى $\int_s \mathrm{f(x,y,z)da}$ للسطح المنحنى فقط حيث $f = xz + 3y - z$ والسطح s مكون من نصف اسطوانه محورها محور z ونصف قطر قاعدتها 3 ومستطيل فى المستوى xz ونصف دائرتين فى المستويين $z = 0, z = 4$.

٢- أ-اذكر بدون برهان منطوق نظرية ستوكس – ثم حقق النظرية للمتجه $\vec{A}$ حيث

$\vec{\mathrm{A}} = (2x - y)\vec{\imath} - yz^2\vec{\jmath} - y^2z\vec{k}$ على السطح s الذى يكون السطح العلوى للكرة

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، C حدودها.

ب- أحسب التكامل الخطى $\int_\Gamma f(x,y,z)dl$ حيث $f = x^2 - yz$ ، Γ هو الخط المستقيم الموازىلمحور x والمسار من النقطة $A\ (1,2,3)$ الى النقطة $B(4,2,3)$.

٣-أ-اذكر بدون برهان :- نظرية المحاور المتوازية بالنسبة لكل من عزم وحاصل ضرب القصور الذاتى.

ب-استنتج عزم القصور الذاتى لقرص دائرى منتظم كتلته M ونصف قطره a حول مركزه وحول أى محور مار بمركزه وفى مستواه .

ج- $ABCD$ سلك منتظم السمك والكثافه كتلته $4m$ يكون الأضلاع الأربعة للمربع $ABCD$ الذىطول ضلعه $2l$.أوجد مربع نصف قطر القصور الذاتى للسلك حول الضلع AD ثم حول محور عمودى على مستوى المربع عند A.

٤-أ-استنتج عزم القصور الذاتى لكرة مفرغة نصف قطرها a وكتلتها M حول مركزها وحول أى محور مار بمركزها وحول أى مستوى مار بمركزها .

ب-صفيحه على شكل مثلث طول قاعدتها a وارتفاعها h وكتلتها M ،أوجد عزم القصور الذاتى حول محور مار بقاعدتها وحول محور مار بمركز الصفيحة ويوازى القاعدة وحول محور مار برأس الصفيحة ويوازى القاعدة .

٥-أ-غمر مخروط فى الماء بحيث يقع راسم منه فى سطح الماء.أثبت أن الضغط المحصل على السطح المنحنى يميل على الرأسى بزاوية $\tan^{-1}\left(\frac{3\tan\alpha}{1-2\tan^2\alpha}\right)$ حيث α نصف زاوية رأس المخروط.

ب- حقق نظرية جاوس للأنتشار للحقل الأتجاهى $\vec{F}=x\vec{i}-xy\vec{j}+3z\vec{k}$ اذا كان السطح هو متوازى المستطيلات الذى يكون له الركنين $(0,0,0),(a,b,c)$.

تمنياتى بالتوفيق أ.د/محمود عبد العاطى

الأجابة

اجابة السؤال الأول

إذا كان S سطح مقفل ويحوي الحجم V وكان متجه الوحدة $\hat{n}$ هو المتجه العمودي على السطح S وفي الاتجاه الخارج من الحجم V وكان الحقل الاتجاهي $\underline{F}$ معرفاً عند كل نقطة في الحجم V وعلى السطح S فإن

$$\oint_S \underline{F}\cdot\hat{n}\,da=\int_V \nabla\cdot\underline{F}\,dv$$

ويسمى التكامل في الطرف الأيسر بفيض الحقل $\underline{F}$ من السطح S وتوضح لنا هذه النظرية علاقة فيض $\underline{F}$ من S بانتشار هذا الحقل $\underline{F}$ في الحيز الموجود بداخل S ، أي الحجم V

ثانياً باستخدام نظرية جاوس

$$\oint_S \underline{F}\cdot\underline{ds}=\int_V \nabla\cdot\underline{F}\,dv$$

حيث

$$\nabla\cdot\underline{F}=z+2x=r\cos\theta+2r\sin\theta\cos\phi$$
$$dv=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$
$$\nabla\cdot\underline{F}\,dv=r^3(\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta\cos\phi)\,dr\,d\theta\,d\phi$$

حيث

$$0<r<a \quad , \quad 0<\theta<\pi/2 \quad , \quad 0<\phi<2\pi$$

$$\int_V\nabla\cdot\underline{F}\,dv=\int_0^a\int_0^{\pi/2}r^3(\sin\theta\cos\theta[\phi]_0^{2\pi}+2\sin^2\theta[\sin\phi]_0^{2\pi})\,drd\theta$$
$$=2\pi\int_0^a\int_0^{\pi/2}r^3\sin\theta\cos\theta drd\theta$$
$$=2\pi\cdot\frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^4}{4}=\oint_S\underline{F}\cdot\underline{ds}$$

ب- نستخدم هنا الإحداثيات الاسطوانية لجميع أجزاء السطح فيما عدا المستطيل حيث يناسبه الإحداثيات الكارتيزية ، وبذلك يكون لدينا الآتي

١- نصف الاسطوانة

$$\rho=3 \quad , \quad 0<\phi<\pi \quad , \quad 0<z<4$$
$$da_1=\rho\,d\phi\,dz$$

$$da_4=dx\,dz$$

وكما نعلم أنه في الإحداثيات الاسطوانية

$$x=\rho\cos\phi \quad , \quad y=\rho\sin\phi \quad , \quad z=z$$

وعلى ذلك فإن التكامل السطحي هي

$$\iint_{S_1} f\, da_1 = \int_0^4 \int_0^\pi (3z\cos\phi + 9\sin\phi - z)3d\phi\, dz$$

$$= 3\left[\frac{3}{2}z^2\sin\phi - 9z\cos\phi - \frac{1}{2}z^2\phi\right]_{0,0}^{4,\pi}$$

$$= 3[9(4)(2) - 8\pi] = 24(9-\pi)$$

اجابة السؤال الثاني

أ- **نظرية أستوك**

إذا كان Γ مسار مقفل يحدد أي سطح S فيكون التكامل الخطي للمتجه $\underline{F}$ حول Γ يساوي التكامل السطحي لدوران المتجه $\underline{F}$ حول S ، ويمكن صياغتها رياضياً كما يلي

$$\oint_\Gamma \underline{F}\cdot \hat{t}\, dl = \int_S (\nabla \wedge \underline{F})\cdot \underline{n}\, ds$$

ويسمى التكامل في الطرف الأيسر بالتفاف الحقل $\underline{F}$ حول المسار Γ وتوضح لنا هذه النظرية علاقة التفاف $\underline{F}$ حول Γ بمركبة دوران $\underline{F}$ في الاتجاه العمودي على المنطقة المحاطة بالمسار Γ ،

--الحدود c للسطح S تكون دائرة في المستوى xy ونصف قطرها الوحدة ومركزها نقطة الأصل لذلك

$$x = \cos\theta \quad , \quad y = \sin\theta \quad , \quad z = 0 \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\oint_c \underline{A}\cdot \underline{dr} = \oint_c \left\{(2x-y)dx - yz^2dy - y^2zdz\right\}$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos\theta - \sin\theta)(-\sin\theta)d\theta = \pi \qquad (1)$$

أيضاً

$$\nabla \wedge \underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2 z \end{vmatrix} = \underline{k}$$

وعلى ذلك يكون

$$\int_S (\nabla \wedge \underline{A}) \cdot \underline{ds} = \int_S \underline{k} \cdot \underline{n}\, ds = \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$$

$x^2 + y^2 = 1$ على الدائرة $\underline{k} \cdot \underline{n}\, ds = dxdy$ حيث

$$\therefore \int_S (\nabla \wedge \underline{A}) \cdot \underline{ds} = 4\int_0^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\ dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \pi \quad (2)$$

من (1),(2) تكون نظرية أستوك د تحققت ٠

ب- حيث أن الخط المستقيم موازي لمحور x فإن

$$y = 2, z = 3, 1 \le x \le 4, dl = dx$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z) dl = \int_1^4 (x^2 - 6) dx = 3$$

اجابة السؤال الثالث

أ- **نظرية المحاور المتوازية :-**

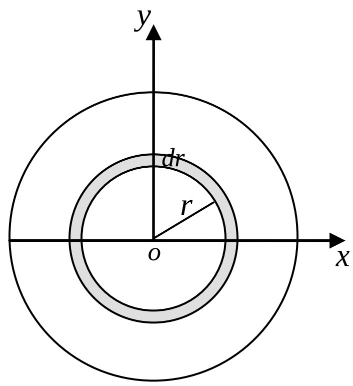
أ- بالنسبة لعزم القصور الذاتي

" عزم القصور الذاتي لجسم متماسك حول محور يساوي عزم القصور الذاتي لهذا الجسم حول محور يوازيه ويمر بمركز ثقل الجسم مضافاً إليه حاصل ضرب الكتلة في مربع المسافة العمودية بين المحوريين"

- بالنسبة لحاصل ضرب القصور الذاتي :-

" حاصل ضرب القصور الذاتي لجسم متماسك بالنسبة إلى محورين متعامدين يساوي حاصل ضرب القصور الذاتي لهذا الجسم بالنسبة إلى محورين يوازيان المحورين السابقين ويمران بمركز ثقل الجسم مضافاً إليه حاصل ضرب كتلة الجسم في إحداثي مركز الثقل بالنسبة إلى المحورين السابقين "

ب-عزم القصور الذاتي لقرص دائري منتظم



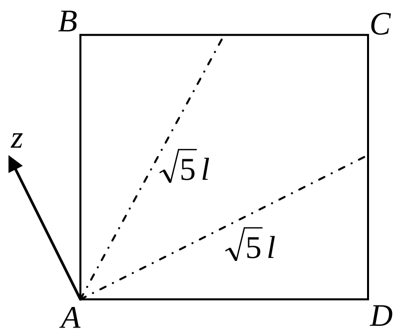
نفرض أن ρ هي كتلة وحدة

مساحة القرص ، وأن a هو

نصف القطر ، من التعريف

$$I_{\circ} = \int_{0}^{a} (2\pi r dr \rho)\,(r^2) = \frac{1}{2} M a^2$$

حـــيث $M = \pi a^2 \rho$ ولكن $I_{\circ} = I_x + I_y$ وبما أن x, y هما محوري تماثل $\Leftarrow$ $I_x = I_y$



ج-أولاً: حول الضلع AD

نفرض أن k نصف قطر القصور

$I_{AD} = I_{AD}$ (للسلك AD) + I_{AD} (للسلك CD)

$+ I_{AD}$ (للسلك BC) + I_{AD} (للسلك AB)

$$= 0 + \frac{4}{3} ml^2 + (0 + 4ml^2) + \frac{4}{3} ml^2 = \frac{20}{3} ml^2$$

$$\therefore \frac{20}{3} ml^2 = 4mk^2 \qquad \Rightarrow \qquad k = l\sqrt{5/3}$$

ثانياً: حول محور AZ **العمودي على مستوى المربع عند** A

كما سبق

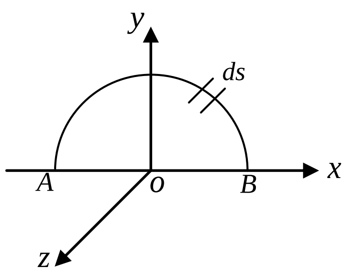
$$I_{AZ} = \frac{4}{3} ml^2 + \left(\frac{1}{3} ml^2 + m(\sqrt{5} l)^2 \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{3} ml^2 + m(\sqrt{5} l)^2 \right) + \frac{4}{3} ml^2 = \frac{40}{3} ml^2$$

$$\therefore I_x = I_y = \frac{1}{4}Ma^2 \therefore \frac{40}{3}ml^2 = 4mk^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{10}{3}}l$$

اجابة السؤال الرابع

أ-**الكرة المفرغة**



معادلة الدائرة هي

$$x^2 + y^2 = a^2$$

كما أن

$$ds = \frac{a}{y}dx = \frac{a}{x}dy$$

$$\because dI_x = dm \cdot y^2$$

وحيث أن

$$dm = 2\pi y ds \cdot \rho$$

$$\therefore I_x = 2\pi\rho\int_{-a}^{a} y^3 ds = 2\pi a\rho\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)ds$$

$$= \frac{2}{3}Ma^2$$

$$I_{xoy} = I_{yoz} = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}Ma^2$$

$$I_{\circ} = Ma^2$$

ب-**عزم القصور الذاتي لصفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث**

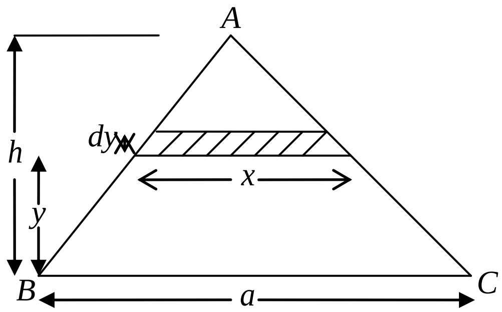
نفرض أن الأطوال كما في

الشكل ونفرض أن ρ كتلة

وحدة مساحة المثلث . من

العلاقات الهندســية للمثلث

نجد أن



$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}$$

<u>أولاً:</u> عزم القصور الذاتي حول أحد أضلاع المثلث

من التعريف

$$I_{BC} = \int_0^h (x\rho dy)(y^2) = \frac{a}{h}\rho\int_0^h (h-y)(y^2)dy$$

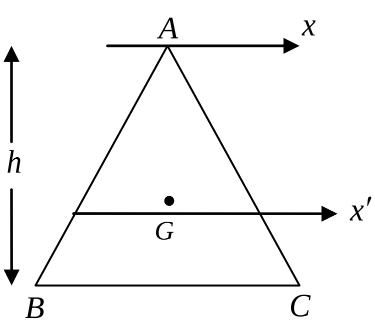
$$= \frac{1}{6}Mh^2$$

حيث $M = \frac{1}{2}ah\rho$

<u>ثانياً:</u>حول محور يمر بمركز ثقل المثلث ويوازي أحد أضلاعه

بتطبيق نظرية المحاور المتوازية

نجد أن



$$I_{x'} = \frac{1}{6}Mh^2 - M\left(\frac{1}{3}h\right)^2$$

$$= \frac{1}{18}Mh^2$$

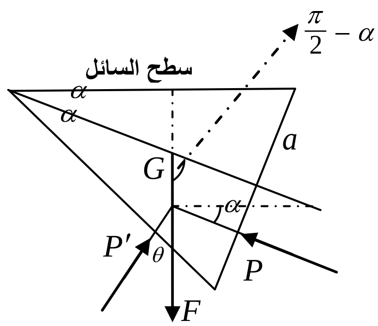
<u>ثالثاً :</u>

حول محور يمر بأحد رؤوس المثلث ويوازي القاعدة المقابلة

$$I_x = \frac{1}{18}Mh^2 + M\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{2}Mh^2$$

اجابة السؤال الخامس

أ- **الحــل**



يؤثر الســـــائل على المخروط المغمور

بقوة رأسية (قاعدة أرشميدس)تتعين من

$$F=\frac{1}{3}\pi a^{2}(a\cot\alpha)w$$

حيث w الوزن النوعي للسـائل ويمكن

اعتبار F محصلة قوتين :-

١- P وهو الضغط الكلي على قاعدة المخروط ويتعين من

$$P=\pi a^{2}\cdot a\cos\alpha\cdot w=\pi a^{3}w\cos\alpha$$

٢- P' وهو الضغط الكلي على السطح المنحني لذلك

$$P'\sin\theta=P\cos\alpha$$

$$P'\cos\theta+P\sin\alpha=F\quad\Rightarrow\quad P'\cos\theta=F-P\sin\alpha$$

$$\therefore\tan\theta=\frac{P\cos\alpha}{F-P\sin\alpha}=\frac{\pi a^{3}w\cos^{2}\alpha}{\frac{1}{3}\pi a^{2}(a\cot\alpha)w-\pi a^{3}w\cos\alpha\sin\alpha}$$

$$\therefore\tan\theta=\frac{3\cos^{2}\alpha}{\cot\alpha-3\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{3\cos^{2}\alpha\tan\alpha}{1-3\cos\alpha\sin\alpha\tan\alpha}$$

$$=\frac{3\cos^{2}\alpha\tan\alpha}{1-3\cos\alpha\sin\alpha\tan\alpha}=\frac{3\cos^{2}\alpha\tan\alpha}{1-3\sin^{2}\alpha}$$

$$=\frac{3\cos^{2}\alpha\tan\alpha}{\cos^{2}\alpha-2\sin^{2}\alpha}=\frac{3\tan\alpha}{1-2\tan^{2}\alpha}$$

ب- نرمز للحقل بالرمز $\underline{F_3}$ وبالتالى يكون ،

$$\nabla\cdot\underline{F_3}=4-x$$

$$\int_{v}\nabla\cdot\underline{F_3}\,dv=\int_{0}^{c}\int_{0}^{b}\int_{0}^{a}(4-x)dxdydz=4abc-\frac{a^{2}bc}{2}$$

$$\oint \underline{F_3} \cdot \hat{n}\, da = \int_{x=a} x\,dy\,dz - \int_{y=b} xy\,dx\,dz + \int_{z=c} 3z\,dy\,dz$$

$$= \left[yz\right]_{\substack{y=b\\z=c}} - b\left[\frac{x^2 z}{2}\right]_{\substack{x=a\\z=c}} + 3c\left[xy\right]_{\substack{x=a\\y=b}}$$

$$= abc - \frac{1}{2}a^2bc + 3abc = 4abc - \frac{a^2bc}{2}$$

انتهت اجابة الأختبار

أ.د.محمود عبد العاطى محمود-كلية العلوم –قسم الرياضيات