جامعة بنها – كلية التربية – الفصل الدراسي الأول للعام ٢٠١٣/٢٠١٤
امتحان (تخلفات) الفرقة الثالثة (لائحة قديمة)– شعبة رياضيات
المادة / نظرية المرونه + كهربيه ساكنه **الزمن / ثلاث ساعات**

الكهربيه الساكنه

أجب عن الأسئلة الآتيه :

١- أ- أثبت أن المجال الكهروستاتيكي للمزدوج الكهربي يعطى بالعلاقة

$$\underline{E} = \frac{3(\underline{M}\cdot\underline{r})\,\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{M}}{r^3}$$

١- ب- شحنتان $e, -e$ موضوعتان عند النقطتين A, B على الترتيب ٠ إذا كان خط القوة الخارج من النقطة A وصانعاً زاوية α مع AB يلاقي المستوى الذي يقطع وينصف AB ويتعامد علية في النقطة P ٠ أثبت أن

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\,\sin\frac{P\hat{A}B}{2}$$

٢- أوجد الجهد عند نقطة الناشئ عن رباعي الأقطاب الخطي وشدة المجال الناشئ عنه عند هذه النقطة ٠ ثم أوجد معادلة خطوط القوى له ٠

٣- أ- ثلاث شرائح كروية الشكل متحدة المركز أنصاف أقطارها a,b,c بحيث أن $a<b<c$ ٠ إذا كانت الشريحة الداخلية التي نصف قطرها c متصلة بالأرض والشريحة الخارجية التي نصف قطرها a أيضا متصلة بالأرض بينما الشريحة الوسطى تحمل شحنة مقدارها e ٠ بين كيف تتوزع الشحنة e على السطح الداخلي والخارجي للشريحة الكروية الوسطى ٠

٣- ب- أوجد الجهد باستخدام الإحداثيات الكارتيزية لسطحين موصلين بالأرض موضوعين عند $y=0\,,\,y=b$ والمسافة بينهما b٠

مع أطيب التمنيات بالنجاح **أنظر ورقة اختبار المرونه**

إجابة اختبار تخلفات مادة الكهربيه الساكنه للفرقة الثالثة كلية التربية شعبة رياضه عام لائحة قديمة العام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٣ الفصل الدراسي الأول تاريخ الاختبار الأحد الموافق ٢٠١٣/١٢/٢٢ (نصف ورقه امتحانيه)

أستاذ المادة د/ مجدي مصطفي حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول

أ- العلاقة بين المجال الكهربي والجهد هي

$$\underline{E} = -\nabla V \qquad (1)$$

ولكن $V = \dfrac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r^3}$ ، بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن

$$\therefore\ \underline{E} = -\nabla\left(\frac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r^3}\right) = -\left[\frac{1}{r^3}\nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) + (\underline{M}\cdot\underline{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] \qquad (2)$$

نفرض أن عزم المزدوج $\underline{M}$ هو

$$\underline{M} = M_x\underline{i} + M_y\underline{j} + M_z\underline{k} \qquad , \qquad \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\therefore\ \nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}\right)(xM_x + yM_y + zM_z)$$

$$\therefore\ \nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) = M_x\underline{i} + M_y\underline{j} + M_z\underline{k} = \underline{M} \qquad (3)$$

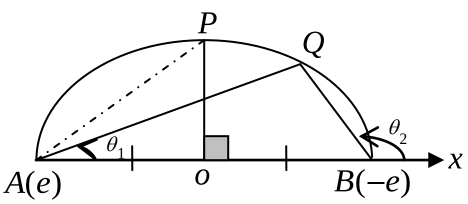
حيث $\underline{M}$ متجه ثابت ٠ أيضاً

$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3r^{-5}\underline{r} \qquad (4)$$

إذن بالتعويض من (4),(3) في المعادلة (2) نحصل على

$$\therefore\ \underline{E} = -\left[\frac{\underline{M}}{r^3} + (\underline{M}\cdot\underline{r})(-3r^{-5}\underline{r})\right] = \frac{3(\underline{M}\cdot\underline{r})\,\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{M}}{r^3}$$

ب-



نفرض أن Q أي نقطة على خـط القوة ونفرض أن $\theta_1 = \angle BAQ$ ، $\theta_2 = \angle XBQ$ إذن من الفرض عنـــدما $Q \to A, \theta_1 \to \alpha$ فإن $\theta_2 \to \pi$ ٠

معادلة خط القوة هي

$$e\cos\theta_1 - e\cos\theta_2 = c \qquad (c \quad is\ a\ const.) \qquad (a)$$

باستخدام الشروط عنـــدما $Q \to A, \theta_1 \to \alpha$ فإن $\theta_2 \to \pi$ نحصل على $e\cos\alpha + e = c$ وبالتعويض عن قيمة c ينتج أن

$$e\cos\theta_1 - e\cos\theta_2 = e\cos\alpha + e$$

$$\therefore\ \cos\theta_1 - \cos\theta_2 = \cos\alpha + 1 = 2\cos^2(\alpha/2) \qquad (b)$$

عند النقطة P التي تقع على المستوى الذي ينصف AB ويتعامد عليه ، تكون $\theta_1 = \angle PAB = \beta \quad say\ , \theta_2 = \pi - \beta$ لذلك تصبح المعادلة (b) على الصورة

$$\cos\beta - \cos(\pi - \beta) = \cos\alpha + 1$$

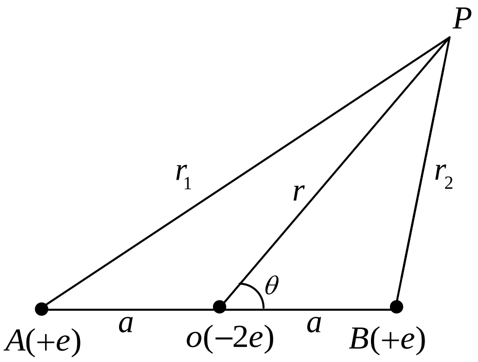
(c)

$$2\cos\beta = \cos\alpha + 1$$

$$\therefore 2\left(1-2\sin^2\frac{\beta}{2}\right) = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+1 \qquad \Rightarrow \qquad \therefore \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\,\sin\frac{\beta}{2}$$

<u>إجابة السؤال الثاني</u>

نفرض شحنتان مقدارها كل منهما e موضوعتـان عند النقطتين A,B على الترتيب، ونفـرض أن هنـاك شحنة ســـــالبة $-2e$ موضوعة عند النقطة o إذا كانت P نقطــة في لمســتوى وكان أبعـــــــادها عن النقط A,o,B هما $r_1\,,\,r\,,\,r_2$ على الترتيب ، الجهد الناشئ عن الشحنات الثلاثة عند النقطة P يساوي



$$V_P = \frac{e}{r_1} - \frac{2e}{r} + \frac{e}{r_2} \tag{1}$$

ولكن

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\pi-\theta) = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta = r^2\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2 + (2\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)\right]$$

$$\therefore \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2 + (2\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)\right]^{-1/2}$$

بإستخدام نظرية ذات الحدين نحصل على

$$\therefore \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left[1-\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \cdots\right] \tag{2}$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left[1+\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \cdots\right] \tag{3}$$

بالتعويض من (2),(3) في المعادلة (1) نحصل على

$$V_P = \frac{e}{r}\left[1-\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \cdots\right] - \frac{2e}{r}$$
$$+ \frac{e}{r}\left[1+\cos\theta\left(\frac{a}{r}\right) + \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$\therefore V_P = \frac{e}{r}(3\cos^2\theta - 1)\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \frac{a^2 e}{r^3}(3\cos^2\theta - 1) \tag{4}$$

شدة المجال الناشئ عن رباعي الأقطاب الخطي :

نعلم أن العلاقة بين الجهد V وشدة المجال الكهروستاتيكي $\underline{E}$ هي $\underline{E}=-\nabla V$ ، من المعادلة (4) نلاحظ أن الجهد دالة في r,θ ولذلك يأخذ المجال $\underline{E}$ الصورة

$$\underline{E}=E_r\,\hat{r}+E_\theta\,\hat{\theta}=-\frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\hat{\theta} \tag{5}$$

حيث

$$\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{3a^2e}{r^4}(3\cos^2\theta-1) \tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=\frac{a^2e}{r^3}(-6\cos\theta\sin\theta)=-\frac{3a^2e}{r^3}\sin 2\theta \tag{7}$$

بالتعويض من المعادلتين (7),(6) في المعادلة (5) نحصل على

$$\therefore \underline{E}=\frac{3a^2e}{r^4}\left[(3\cos^2\theta-1)\,\hat{r}+\sin 2\theta\,\hat{\theta}\right] \tag{8}$$

نوجد قيمة شدة المجال

$$E=\sqrt{E_r^2+E_\theta^2}=\frac{3a^2e}{r^4}\left[\cos^2\theta(9\cos^2\theta-6+4-4\cos^2\theta)+1\right]^{1/2}$$

$$\therefore E=\frac{3a^2e}{r^4}\left[\cos^2\theta(5\cos^2\theta-2)+1\right]^{1/2} \tag{9}$$

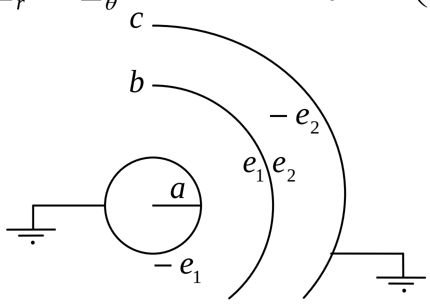
من المعادلة (8) نجد أن

$$E_r=\frac{3a^2e}{r^4}(3\cos^2\theta-1)\qquad,\qquad E_\theta=\frac{3a^2e}{r^4}\sin 2\theta$$

إذن معادلة خطوط القوى هي

$$\frac{dr}{E_r}=\frac{rd\theta}{E_\theta}\quad\Rightarrow\quad \therefore\int\frac{dr}{r}=\int\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)d\theta+c_1\quad\Rightarrow\quad \therefore r^2=c\sin^2\theta\cos\theta$$

وهذه هي معادلة خطوط القوى لرباعي الأقطاب الخطي حيث c ثابت التكامل .



إجابة السؤال الثالث

أ- بمــا أن الشريحــة الداخــلية التي نصف قطرها a متصلة بالأرض إذن الشحنة على سطحها الخارجي تنعدم أي تساوي الصفر ، نفرض أن تتوزع إلى الشحنات e_1,e_2 على السطحين الداخلي والخارجي للشريحة الوسطى على الترتيب ، بما أن الشحنة داخل الشريحة الوسطى تنعدم (من خواص الموصلات) إذن يجب أن تتكون شحنة $-e_1$ على السطح الخارجي للشريحة الصغرى وأيضاً بما أن الشحنة الكلية داخل الشريحة الكبرى تنعدم إذن يجب أن تتكون شحنة مقدارها $-e_2$ على السطح الداخلي للشريحة الكبرى .

$$\therefore\ e_1+e_2=e \tag{a}$$

إذن الجهد عند أي نقطة داخل الشريحة الصغرى يساوي مجموع الجهود أي $-\dfrac{e_1}{a}+\dfrac{e}{b}-\dfrac{e_2}{c}$

ولكن الشريحة الصغرى متصلة بالأرض ينتج من ذلك أن الجهد داخلها ينعدم أي أن

$$-\frac{e_1}{a}+\frac{e}{b}-\frac{e_2}{c}=0 \qquad \text{(b)}$$

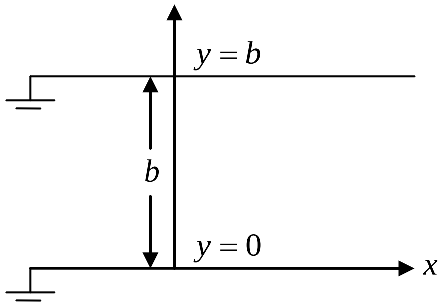
من المعادلتين (a),(b) ينتج أن

$$e_1=\frac{a\,e_2(c-b)}{c(b-a)}$$

بالتعويض في المعادلة (a) ينتج أن

$$e_2+\frac{a\,e_2(c-b)}{c(b-a)}=e \quad\Rightarrow\quad \therefore e_2=\frac{c\,e(b-a)}{b(c-a)} \quad\Rightarrow\quad \therefore e_1=\frac{a\,e(c-b)}{b(c-a)}$$

ب- باستخدام الإحداثيات الكارتيزية وبما أن



$$\nabla^2 V=0 \qquad (1)$$

وحـــيث أن الجهد يعتمد على المتغيرين x,y فقط

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \qquad (2)$$

نفرض أن

$$V(x,y)=X(x)\,Y(y) \qquad (3)$$

بالتعويض في المعادلة (2) ينتج أن

$$Y\,\frac{d^2X}{dx^2}+X\,\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \quad\Rightarrow\quad \therefore \frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \qquad (4)$$

في المعادلة (4) نفرض أن

$$\frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2}=-n^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2Y}{dy^2}=-n^2 Y \qquad (5)$$

وبالتالي نحصل على

$$\frac{d^2X}{dx^2}=n^2 X \qquad (6)$$

الحل العام للمعادلة (5) على الصورة

$$Y=A\sin n\,y+B\cos n\,y \qquad (7)$$

والحل العام للمعادلة (6) على الصورة

$$X=C\,e^{nx}+D\,e^{-nx} \qquad (8)$$

حيث أن الشروط الابتدائية هي $y=0,y=b$ at $V=0$ ، $x=\pm\infty$ at $V=0$ ، وباستخدام الشرط الحدي الأول نجد أن

$$B=0 \quad , \quad n=k\pi/b$$

حيث k عدد صحيح ، وبذلك يكون الحل العام لمعادلة لابلاس على الصورة

$$V_1=\sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{\frac{k\pi}{b}x}\,\sin\frac{k\pi}{b}y \qquad -\infty<x<0$$

$$V_2=\sum_{k=1}^{\infty} B_k\, e^{-\frac{k\pi}{b}x}\,\sin\frac{k\pi}{b}y \qquad 0<x<\infty$$