جامعة بنها – كلية التربية – الفصل الدراسي الأول للعام ٢٠١٣/٢٠١٤
امتحان الفرقة الثالثة تربية عام شعبة رياضيات
المادة / كهربية ساكنة + رياضيات تطبيقية (ديناميكا الجسم الجاسئ) **الزمن / ساعتان**

الكهربيه الساكنه

أجب عن الأسئلة الآتيه :

السؤال الأول

أ- شحنتان $e, -e$ موضوعتان عند النقطتين A, B على الترتيب ، إذا كان خط القوة الخارج من النقطة A وصانعاً زاوية α مع AB يلاقي المستوى الذي يقطع وينصف AB ويتعامد علية في النقطة P ، أثبت أن

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{P\hat{A}B}{2}$$

ب- أثبت أن المجال الكهروستاتيكي للمزدوج الكهربي يعطى بالعلاقة

$$\underline{E} = \frac{3(\underline{M}\cdot\underline{r})\,\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{M}}{r^3}$$

جـ - برهن على أن جهد كرة مصمتة نصف قطرها a وكثافتها ρ عند نقطة بعدها r من المركز يساوي $\frac{2}{3}\pi\gamma\rho(r^2 - 3a^2)$ إذا كانت $r < a$ ثم أوجد الجهد عندما $r \geq a$ والمجال الجاذب في الحالتين ،

السؤال الثاني

أ- ثلاث شرائح كروية الشكل متحدة المركز أنصاف أقطارها a, b, c بحيث أن $a < b < c$ ، إذا كانت الشريحة الداخلية التي نصف قطرها c متصلة بالأرض والشريحة الخارجية التي نصف قطرها a أيضا متصلة بالأرض بينما الشريحة الوسطى تحمل شحنة مقدارها e ، بين كيف تتوزع الشحنة e على السطح الداخلي والخارجي للشريحة الكروية الوسطى ،

ب- أوجد الجهد باستخدام الإحداثيات الكارتيزية لسطحين موصلين بالأرض موضوعين عند $y = 0\,,\, y = b$ والمسافة بينهما b ،

مع أطيب التمنيات بالنجاح **أنظر ورقة اختبار ديناميكا الجسم الجاسئ**

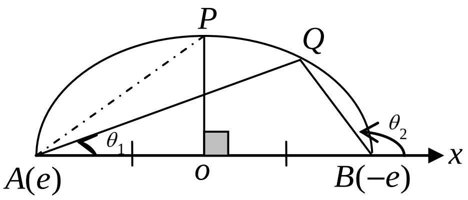
إجابة اختبار مادة الكهربيه الساكنه للفرقة الثالثة تربية عام - كلية التربية شعبة رياضيات العام الدراسى ٢٠١٣/٢٠١٤

الفصل الدراسى الأول تاريخ الاختبار السبت الموافق ٢٠١٣/١٢/٢٨ (نصف ورقه امتحانيه)

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول

أ-



نفرض أن Q أي نقطة على خـط القوة ونفرض أن

$\theta_1 = \angle BAQ$ ، $\theta_2 = \angle XBQ$ إذن من الفرض

عندمـــــا $Q \to A, \theta_1 \to \alpha$ فإن $\theta_2 \to \pi$ ،

معادلة خط القوة هي

$$e\cos\theta_1 - e\cos\theta_2 = c \qquad (c \quad is\ a\ const.) \tag{a}$$

باستخدام الشروط عندمـــــا $Q \to A, \theta_1 \to \alpha$ فإن $\theta_2 \to \pi$ نحصل على $e\cos\alpha + e = c$ وبالتعويض عن قيمة c ينتج أن

$$e\cos\theta_1 - e\cos\theta_2 = e\cos\alpha + e$$

$$\therefore\ \cos\theta_1 - \cos\theta_2 = \cos\alpha + 1 = 2\cos^2(\alpha/2) \tag{b}$$

عند النقطة P التي تقع على المستوى الذي ينصف AB ويتعامد عليه ، تكون $\theta_1 = \angle PAB = \beta \quad say, \theta_2 = \pi - \beta$

لذلك تصبح المعادلة (b) على الصورة

$$\cos\beta - \cos(\pi - \beta) = \cos\alpha + 1$$

$$2\cos\beta = \cos\alpha + 1 \tag{c}$$

$$\therefore 2\left(1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \therefore\ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\,\sin\frac{\beta}{2}$$

ب- العلاقة بين المجال الكهربي والجهد هي

$$\underline{E} = -\nabla V \tag{1}$$

ولكن $V = \dfrac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r^3}$ ، بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن

$$\therefore\ \underline{E} = -\nabla\left(\frac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r^3}\right) = -\left[\frac{1}{r^3}\nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) + (\underline{M}\cdot\underline{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] \tag{2}$$

نفرض أن عزم المزدوج $\underline{M}$ هو

$$\underline{M} = M_x\underline{i} + M_y\underline{j} + M_z\underline{k} \qquad , \qquad \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\therefore\ \nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}\right)(xM_x + yM_y + zM_z) = \underline{M} \tag{3}$$

$$\because \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3r^{-5}\underline{r} \tag{4}$$

إذن بالتعويض من (3),(4) في المعادلة (2) نحصل على

$$\therefore\ \underline{E} = -\left[\frac{\underline{M}}{r^3} + (\underline{M}\cdot\underline{r})(-3r^{-5}\underline{r})\right] = \frac{3(\underline{M}\cdot\underline{r})\,\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{M}}{r^3}$$

جـ - أولاً : إيجاد المجال الجاذب

أ- عندما $r<a$ نجد أن

$$\oiint_S \underline{F}\cdot \underline{ds} = -4\pi\gamma M \quad \Rightarrow \quad \therefore F\oiint_S ds = -4\pi\gamma m$$

ولكن

$$m=\frac{4}{3}\rho\pi r^3 \quad , \quad M=\frac{4}{3}\rho\pi a^3 \quad \Rightarrow \quad \therefore \rho=\frac{3M}{4\pi a^3}$$

$$\therefore m=\frac{3M}{4\pi a^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{M r^3}{a^3}$$

$$\therefore F\oiint_S ds = -4\pi\gamma\frac{M r^3}{a^3} \quad \Rightarrow \quad \therefore F=-\frac{\gamma M r}{a^3}$$

ب- عندما $r\geq a$ (خارج الكرة) نجد أن

$$F(4\pi r^2)=-4\pi\gamma M \quad \Rightarrow \quad \therefore F=-\frac{\gamma M}{r^2}$$

أي أن

$$F=\begin{cases} -\dfrac{\gamma M}{r^2} & r\geq a \\ -\dfrac{\gamma M}{a^3}r=-\dfrac{4}{3}\gamma\pi\rho r & r<a \end{cases}$$

ثانياً : إيجاد الجهد

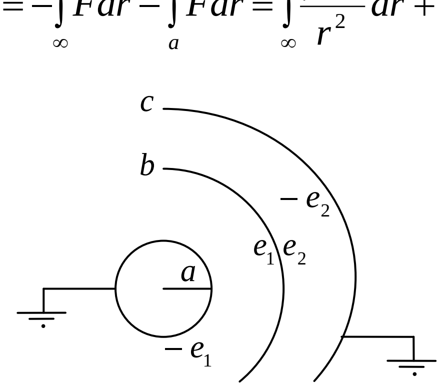
أ- الجهد خارج الكرة أي أن $r\geq a$ يكون

$$\phi=-\int_\infty^r F dr=\int_\infty^r\frac{\gamma M}{r^2}dr=-\frac{\gamma M}{r}$$

أي أن مجال وجهد كرة مصمتة عند نقطة خارجها هو نفس المجال والجهد الناشئ عن كتلة مساوية لكتلة الكرة وموجودة عند مركزها

ب- الجهد عند نقطة داخل الكرة $(r<a)$

$$\phi=-\int_\infty^a F dr-\int_a^r F dr=\int_\infty^a\frac{\gamma M}{r^2}dr+\int_a^r\frac{\gamma M}{a^3}r dr=\frac{\gamma M}{2a^3}(r^2-3a^2)=\frac{2\gamma\pi\rho}{3}(r^2-3a^2)$$



إجابة السؤال الثاني

أ- بمـــا أن الشريحـــة الداخـــلية التي نصف قطرهـا a متصلـة بالأرض إذن الشـحنة على سـطحها الخارجي تنعدم أي تســاوي الصفر ، نفرض أن تتــوزع إلى الشـــــحنات e_1, e_2 على السطحين الداخلي والخارجي للشريحة الوســطى على الترتيب ، بمــــا أن الشحنة داخل الشريحـة الوسطى تنعدم (من خواص الموصلات) إذن يجب أن تتكون شــــحنة $-e_1$ على الســطح الخارجي للشريحة الصغرى وأيضاً بما أن الشــــحنة الكلية داخل الشــريحة الكبرى تنعدم إذن يجب أن تتكون شـحنة مقدارها $-e_2$ على السطح الداخلي للشريحة الكبرى .

$$\therefore\; e_1 + e_2 = e \qquad (a)$$

إذن الجهد عند أي نقطة داخل الشريحة الصغرى يساوي مجموع الجهود أي $-\dfrac{e_1}{a}+\dfrac{e}{b}-\dfrac{e_2}{c}$

ولكن الشريحة الصغرى متصلة بالأرض ينتج من ذلك أن الجهد داخلها ينعدم أي أن

$$-\frac{e_1}{a}+\frac{e}{b}-\frac{e_2}{c}=0 \qquad (b)$$

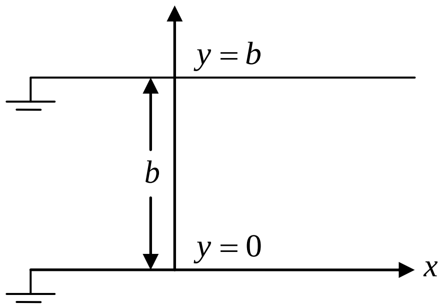
من المعادلتين (a),(b) ينتج أن

$$e_1=\frac{a\,e_2(c-b)}{c(b-a)}$$

بالتعويض في المعادلة (a) ينتج أن

$$e_2+\frac{a\,e_2(c-b)}{c(b-a)}=e \quad\Rightarrow\quad \therefore e_2=\frac{c\,e(b-a)}{b(c-a)} \quad\Rightarrow\quad \therefore e_1=\frac{a\,e(c-b)}{b(c-a)}$$

<u>ب-</u> باستخدام الإحداثيات الكارتيزية وبما أن



$$\nabla^2 V=0 \qquad (1)$$

وحـــيث أن الجهد يعتمد على المتغيرين x, y فقط

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0 \qquad (2)$$

نفرض أن

$$V(x,y)=X(x)\,Y(y) \qquad (3)$$

بالتعويض في المعادلة (2) ينتج أن

$$Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \quad\Rightarrow\quad \therefore \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \qquad (4)$$

في المعادلة (4) نفرض أن

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-n^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2Y}{dy^2}=-n^2Y \qquad (5)$$

وبالتالي نحصل على

$$\frac{d^2X}{dx^2}=n^2X \qquad (6)$$

الحل العام للمعادلة (5) على الصورة

$$Y=A\sin ny+B\cos ny \qquad (7)$$

والحل العام للمعادلة (6) على الصورة

$$X=Ce^{nx}+De^{-nx} \qquad (8)$$

حيث أن الشروط الابتدائية هي $y=0, y=b$ $\quad at \quad$ $V=0$ ، $x=\pm\infty$ $\quad at \quad$ $V=0$ ، وباستخدام الشرط الحدي الأول نجد أن $n=k\pi/b$ ، $B=0$ حيث k عدد صحيح ، وبذلك يكون الحل العام لمعادلة لابلاس على الصورة

$$V_1=\sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{\frac{k\pi}{b}x}\sin\frac{k\pi}{b}y \qquad -\infty<x<0$$

$$V_2=\sum_{k=1}^{\infty} B_k\, e^{-\frac{k\pi}{b}x}\sin\frac{k\pi}{b}y \qquad 0<x<\infty$$