جامعة بنها – كلية التربيه

امتحان الفرقة الثانية اساسى

شعبة الرياضيات

يوم الامتحان: الاثنين 19 / 1 / 2015 م

المادة : جبر (2) (نصف ورقة)

الممتحن: د . / محمد السيد عبدالعال عبدالغنى

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

اسئله + نموذج إجابه

نصف ورقة

جبر (2) & تحليل رياضى (2) ــ لطلاب الفرقة الثانية

تربية أساسى ــ كلية التربية

أولاً: الجبر الخطى

أجب على الاسئله التاليه

السؤال الأول (40 درجة) :-

1. **أوجد** حل مجموعة المعادلات الأتية بإستخدام المصفوفة الموسعة.

$$x + 2y + z = 2$$
$$3x + y - 2z = 1$$
$$4x - 3y - z = 3$$
$$2x + 4y + 2z = 4$$

2. إذا كان V فراغ إتجاهى على الحقل K و كانت $V \supseteq W \neq \phi$، **فبرهن أن** W تكون فراغاً جزئيا من V **إذا وفقط إذا كان** $\alpha u + v \in W$ لكل $u, v \in W \;,\; \alpha \in K$.

السؤال الثانى (45 درجة) :-

1. إذا كان الراسم $T : R^3 \to R^2$ المعرف بالقاعدة $T(a,b,c) = (a+b, b-c)$

أثبت أن:

I. T هو تحويل خطى
II. أوجد مصفوفة التحويل بالنسبة لأساسين القياسيين للفراغين R^3, R^2 .
III. $Ker\ T$ فراغاً جزئيا من R^3 . (حيث $Ker\ T$ هو نواة التحويل T).

السؤال الثالث (35 درجة) :-

1- **عرف** الأساس S للفراغ الخطى V على الحقل K ، **ثم أثبت أن** المجموعة {(1,0,1), (2,-1,1), (4,1,1)}تمثل أساساً للفراغ الخطى R^3 على R .

2- **أوجد** القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوقة A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

-- انتهت أسئلة الجبر -------------

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

نموذج اجابه لأمتحان جبر (2) & تحليل رياضى (2) ــ لطلاب الفرقة الثانية

تربية أساسى ــ كلية التربية (الدرجة الكلية 120 درجة)

اجابة السؤال الأول (40 درجة):

1. أوجد حل مجموعة المعادلات الأتية بإستخدام المصفوفة الموسعة.

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= 2 \\
3x + y - 2z &= 1 \\
4x - 3y - z &= 3 \\
2x + 4y + 2z &= 4
\end{aligned}
$$

الحـــــــــــــل

المصفوفة الموسعةهى:

$$
(A/b)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}
\xrightarrow[r_4\to -2r_1+r_4]{\substack{r_2\to -3r_1+r_2 \\ r_3\to -4r_1+r_3}}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_2\to -\frac{1}{5}r_2}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{r_3\to 11r_2+r_3}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{r_3\to -\frac{1}{6}r_3}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\xrightarrow{r_1\to r_1-2r_2}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_2\to r_2-r_3]{r_1\to r_1+r_3}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

اى ان الحل هو

$$x=1,\quad y=0,\quad z=1$$

==

2. إذا كان V فراغ إتجاهى على الحقل K و كانت $\phi \neq W \subseteq V$ ، فبرهن أن W تكون فراغاً جزئيا من V إذا وفقط إذا كان $\alpha u + v \in W$ لكل $u, v \in W \ , \ \alpha \in K$.

الحـــــــــــل

إذا كانت W فراغاً جزئياً من V فمن مسلمات الفراغ ينتج انه لكل $u, v \in W \ , \ \alpha \in K$ الشرط

$$\alpha u + v \in W$$

وبالعكس إذا كانت $\phi \neq W \subseteq V$ إذن يوجد عنصر $u \in W$ وبالتالى باستخدام الفرض نجد أن

$$0 = -u + u = (-1)u + u \in W$$

وبالتالى اذا كان لكل $u, v \in W \ , \ \alpha \in K$ فأن $\alpha u = \alpha u + 0 \in W$

وكحالة خاصة منها ينتج أن $-v = (-1)v \in W$

وأخيرا اذا كان $u, v \in W$ فأن $u + v = \alpha 1 u + v \in W$

وبالتالى يتحقق الشروط الاربع ولهذا فإن W تكون فراغاً متجهاً جزئيا من V.

==

أجابة السؤال الثانى (45 درجة) :-

1. إذا كان الراسم $T : R^3 \to R^2$ المعرف بالقاعدة $T(a,b,c) = (a+b, b-c)$

أثبت أن:

I. T هو تحويل خطى

II. أوجد مصفوفة التحويل بالنسبة لأساسين القياسيين للفراغين R^3, R^2.

III. Ker T فراغاً جزئيا من R^3. (حيث Ker T هو نواة التحويل T).

الحـــــــــــل

I- لكل $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in R^3, \alpha \in R$ تكون

$$\begin{aligned}
T[\alpha(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)] &= T[(\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2)] \\
&= \big((\alpha x_1 + x_2) + (\alpha y_1 + y_2),\ (\alpha y_1 + y_2) - (\alpha z_1 + z_2)\big) = \\
&= \big(\alpha(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2),\ \alpha(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2)\big) = \\
&= \alpha((x_1 + y_1), (y_1 - z_1)) + ((x_2 + y_2), + (y_2 - z_2)) = \\
&= \alpha T[(x_1, y_1, z_1)] + T[(x_2, y_2, z_2)].
\end{aligned}$$

وهذا يثبت ان T تحويل خطى .

لتعين مصفوفة التحويل بالنسبة للأساسين القياسين نحسب:

$$T[e_1] = T[(1,0,0)] = (1,0) = 1(1,0) + 0(01)$$

محدداً العمود الأول للمصفوفة

$$T[e_2] = T[(0,1,0)] = (1,1) = 1(1,0) + 1(01)$$

محدداً العمود الثانى للمصفوفة

$$T[e_3] = T[(0,0,1)] = (0,-1) = 0(1,0) + -1(01)$$

محدداً العمود الأول للمصفوفة أى ان مصفوفة التحويل هى

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

==

II- $Ker\ T$ ليست فارغة لان $0 \in \ker T$ إذا كانت $u, v \in \ker,\ \alpha \in R$ إذن

$$T(u) = T(v) = 0,\ \ T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v) = 0$$

أى أن $\alpha u + v \in \ker T$ ومن ثم $\ker T$ فراغ جزئى من V.

==

أجابة السؤال الثالث (35 درجة) :-

1- عرف الأساس S للفراغ الخطى V على الحقل K ، ثم أثبت أن المجموعة {(1,0,1), (2,-1,1), (4,1,1)} تمثل أساساً للفراغ الخطى R^3 على R .

الحـــــــــــل

تعريف الأساس :المجموعة $S \subseteq V$ تسمى أساساً لفراغ V على الحقل Kإذا وفقط إذا كان:

(1) S تولد الفراغ V

(2) S مستقلة خطياً على K .

****

إذا كان $S=\{v_1=(1,0,1),\ v_2=(2,-1,1),\ v_3=(4,1,1)\}$ يمكن ببساطة التحقق من أن

$$(a,b,c)=\frac{1}{4}\{(-2a+2b+6c)v_1+(a-3b-c)v_2+(a+b-c)v_3\} \qquad (1)$$

وهو يعنى ان المجموعة $S=\{v_1=(1,0,1),\ v_2=(2,-1,1),\ v_3=(4,1,1)\}$ تولد الفراغ R^3 .

أيضاً $S=\{v_1=(1,0,1),\ v_2=(2,-1,1),\ v_3=(4,1,1)\}$ مستقلين خطياً لأنه إذا كان

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=0,\qquad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\in R$$

نستنتج من (1) ان $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ مما سبق ينتج ان المجموعة

$S=\{v_1=(1,0,1),\ v_2=(2,-1,1),\ v_3=(4,1,1)\}$ تمثل أساساً للفراغ R^3 على R.

==

2- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

الحـــــــــــل

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2=0$$

وبالتالى يكون القيم الذاتية هى $\lambda=2,2$

عندما $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

النظام يؤول إلى $x-y=0$

المتجه الذاتى للقيمة الذاتية $\lambda=2$ هو $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

==