جامعة بنـها - كلية العلوم – قسم الرياضيـات

الفرقة الثانية تربية عام (رياضيات)

تخلفات من الفرقة الأولى

الفصل الدراسي الأول

يوم الامتحان: الأربعاء 24/ 12 / 2014 م

المادة : رياضيات متقدمة (جبر- M112(1))

أستاذ المادة : د . / خليل محمد خليل محمد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

صورة من الامتحان+ نموذج إجابته

كليـة : التربية الفرقة الثانية عـام (تخلفات من الفرقة الأولى) التاريخ: 2014/12/24
شعبة : الرياضيات رياضيات متقدمة (جبر& أساسيات رياضيات) الزمن : ساعــتين
===:

مادة الجـبــر

أجب عما يأتي:-

1-a	باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي برهن أن: $$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$ حيث $n\in \mathrm{N}$.
1-b	حلل الدالة الكسرية $f(x)$ الآتية إلى مجموع من الكسور الجزئية: $$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1}$$
2-a	باستخدام المحددات حل المعادلتين الآتيتين : $$2x+3y-14=0$$ $$3x-2y+5=0$$
2-b	أوجد قيمة k بحيث تكون مجموعة المعادلات $$x+(k+1)y+1=0$$ $$2kx+5y-3=0$$ $$3x+7y+1=0$$ متوافقة.
3-a	أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة $$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$
3-b	1- احسب قيمة العدد $(1+i\sqrt{3})^{18}$ 2- استخدم مفكوك ذات الحدين لإيجاد الأربع حدود الأولى من مفكوك الدالة $\sqrt{1-x}$ واذكر فترة x التي يكون فيها المفكوك صحيحا؟

انظر امتحان أساسيات الرياضيات وتمنياتي لكم بالتوفيق

د./ خليل محمد

إجابة السؤال 1-a:

- في حالة $n=1$ نجد أن

الطرف الأيمن $=\frac{1}{6}(2)(3)=1$

الطرف الأيسر $=1^2=1$. اذن الطرفان متساويان والعلاقة صحيحة عندما $n=1$

2- نفرض صحة العلاقة عندما $n=k$ أي أن

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \qquad (1)$$

3- نثبت صحة العلاقة عندما $n=k+1$ وذلك باستخدام العلاقة (1) بإضافة $(k+1)^2$ لكل من طرفيها نجد أن

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \\
&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2 \\
&=(k+1)\left(\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right) \\
&=\frac{1}{6}(k+1)\big(k(2k+1)+6(k+1)\big) \\
&=\frac{1}{6}(k+1)\big(2k^2+7k+6\big) \\
&=\frac{1}{6}(k+1)\big(k+2)(2k+3\big) \\
&=\frac{1}{6}(k+1)\big(k+2\big)\big(2(k+1)+1\big)
\end{aligned}$$

وهذا يساوي الطرف الأيمن من العلاقة المطلوب أثبات صحتها عندما نضع $n=k+1$. أذن الطرفان متساويان عندما $n=k+1$ وبالتالي تكون العلاقة صحيحة لكل قيم n

إجابة السؤال 1-b:

درجة البسط اقل من درجة المقام ولكن كثيرة الحدود الموجودة في المقام غير أولية ، وبالتالي نحتاج إلى تحليلها إلى عواملها الأولية . بالبحث في عوامل الحد المطلق (وهي ± 1) عن صفر لكثيرة الحدود نجد أن $x=1$ صفر من أصفار المقام وبالتالي نقسم x^3-x^2-x+1 على $x-1$ وينتج من خارج القسمة أن

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)$$

وتكون صورة الكسور الجزئية هي

$$\frac{x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

بضرب الطرفين في المقام نحصل على

$$x^2+x+2=A(x-1)^2+B(x^2-1)+C(x+1)$$

بوضع $x=-1$ نحصل مباشرة على قيمة $A=1/2$ وبوضع $x=1$ نجد أن $C=2$ وللحصول على قيمة B نستخدم طريقة مساواة المعاملات

$$x^2+x+2=A(x-1)^2+B(x^2-1)+C(x+1)$$

$$= (A+B)x^2 + (-2A+C)x + (A-B+C)$$

بمساواة معامل x^2 في الطرفين نحصل على

$$1 = A+B \Rightarrow \therefore B = 1/2$$

وبالتالي يكون الناتج على الصورة :

$$\frac{x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

إجابة السؤال 2-a:

الحل يعطى على الصورة $\dfrac{x}{\Delta_x} = \dfrac{-y}{\Delta_y} = \dfrac{1}{\Delta}$

إذا تحقق الشرط $\Delta \neq 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4-9 = -13 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -14 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 15-28 = -13$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -14 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10+42 = 52$$

إذن الحل هو $\dfrac{x}{-13} = \dfrac{-y}{52} = \dfrac{1}{-13} \Rightarrow \therefore x = 1,\ y = 4$

إجابة السؤال 2-b:

المجموعة المعطاة متوافقة عندما

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ 2k & 5 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore (5+21) - (k+1)(2k+9) + (14k-15) = 0$$

$$\therefore 26 - 2k^2 - 11k - 9 + 14k - 15 = 0$$

$$\therefore 2k^2 - 3k - 2 = 0$$

$$\therefore (2k+1)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = 2 \quad , \quad k = -1/2$$

إجابة السؤال 3-a:

أولاً: نوجد مصفوفة محددات العناصر وهي

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 8 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

ثانياً: نوجد مدور هذه المصفوفة

$$A_{adj} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 3 \\ 5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

ثالثا: نوجد قيمة محددة المصفوفة

$$|A| = 25$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{A_{adj}}{|A|} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{1}{5} & \frac{8}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}$$

إجابة السؤال 3-b:

(1)

الحــل

بكتابة العدد $z = 1 + i\sqrt{3}$ في الصورة القطبية نجد أن

$$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2 \quad , \quad \theta = \arg z = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

وبالتالي يكون المطلوب هو

$$z^{18} = 2^{18}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{18} = 2^{18}(\cos 6\pi + i\sin 6\pi)$$

وذلك من نظرية دي موافر

$$\therefore \ z^{18} = 2^{18}$$

حيث أن $\cos 6\pi = 1 \quad , \quad \sin 6\pi = 0$

(2)

الحــل :

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$$

$$= 1 + (\frac{1}{2})(-x) + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}(-x)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}(-x)^3 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \cdots$$

وفترة x التي يكون فيها المفكوك صحيحاً هي :

$$|-x| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

****